2O06

正方行列の n 乗根を解析的に求めるアルゴリズムの発見

Algorithm for Obtaining Analytical *n*th Roots of a Square Matrix

細矢治夫
お茶の水女子大学（名誉教授）

1. 研究の発端

ピタゴラスの三角形（三辺が整数の直角三角形）の系統樹の中で

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

という二つの行列が重要な役を果たしていることは、既に Hall が指摘している[1]。著者は最近、この D と U が次のように極めて興味深い性質をもっていることを発見した。(**D** は省略)

$$\boldsymbol{U}^{j/k} = \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} k^2 & 2jk & 2jk \\ -2jk & k^2-2j^2 & -2j^2 \\ 2jk & 2j^2 & k^2+2j^2 \end{pmatrix},$$

今回、これをヒントに、固有値の縮重度に関わりなく、また系統的に、行列の n 乗根を解析的に求めるアルゴリズムを開発したので紹介する。

2 新アルゴリズム

与えられた $n\times n$ の正方行列を

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

とする。$\boldsymbol{A}$ のべき $\boldsymbol{A}^m$ の各要素 f_m は $\boldsymbol{A}$ の固有値 (λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n) を使って

$$f_m = c_1\lambda_1{}^m + c_2\lambda_1{}^m + \cdots$$

のように表すことができる。ただし、

$$\boldsymbol{A}^m = \begin{pmatrix} a_m & b_m & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (f_m)$$

この f_m の m に j/k を代入することによって、$\boldsymbol{A}$ の j/k 乗根が求まる。即ち、

$$\mathbf{A}^{j/k} = (f_{j/k})$$

3 計算例

i) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}) = x^2 - 3x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$$

$\alpha = (3+\sqrt{5})/2,\quad \beta = (3-\sqrt{5})/2$ 　を使い、

$$A^n = \begin{pmatrix} [(5-\sqrt{5})\alpha^n \pm (5+\sqrt{5})\beta^n]/10 & (\alpha^n \mp \beta^n)/\sqrt{5} \\ (\alpha^n \mp \beta^n)/\sqrt{5} & [(5+\sqrt{5})\alpha^n \pm (5+\sqrt{5})\beta^n]/10 \end{pmatrix}$$

が得られる（複号同順）。n=1/2 を代入すると、

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の２解が得られる。

ii) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

からは４解が得られるが、その一つを示す。

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}+i)/2 & (\sqrt{2}-i)/2 & 1/\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}-i)/2 & (\sqrt{2}+i)/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

謝辞　お茶の水女子大学理学部情報科学科の吉田裕亮教授に多大の感謝を述べる。

[1] A.Hall, Math. Gaz., 54 (1970) 377.