1O09

トポロジカルインデックスと整数論.
IV. アイゼンシュタイン三角形

細矢治夫
お茶の水女子大学（名誉教授）

1. はじめに

著者はトポロジカルインデックス Z（TopIx Z と略称）の初等数学、特に整数論の基本的諸概念や問題との間の密接な関係について継続的に研究を行っているが [1-3]、今回はアイゼンシュタインの三角形の解析にこの TopIx Z が重要な役割を果たすことを見出したので、その一端を紹介する。

2. アイゼンシュタインの三角形 [4]

三辺が整数の三角形を整数三角形と呼ぶ。その中で最も有名なものが (3, 4, 5) に代表されるピタゴラスの三角形である。一方，一角の角度が 60°または 120°の三角形は，余弦定理によって

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = a^2 + b^2 \pm ab \tag{1}$$

のように整数三角形の出現の可能性が生ずる。具体的に，(7, 5, 3)（七五三）, (7, 5, 8)（名古屋）, (7, 8, 3)（質屋さん）というような整数三角形が存在し，それらはアイゼンシュタイン（Eisenstein）の三角形と俗に呼ばれている。以下 EsT と略称する。なお，上に紹介した愛称は一松氏によるものである[4]。

既に，(i) 互いに素で，(ii) その差が 3 の倍数でない 1 対の正の整数 (m, n) によって次のように表される 3 辺

$$a = m^2 - n^2,\quad b = m(2m + n),\quad c = m^2 + mn + n^2 \tag{2}$$

がアイゼンシュタインの三角形であることの必要十分条件であることが知られている。

更に上にあげた三つの EsT は図 1 で明らかなように，互いに深く関係しており，その中の一つがわかれば，残りの二つは機械的に生成される。

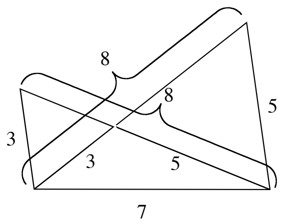

図 1. 共役な 3 個のアイゼンシュタインの三角形

即ち，もし

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab \quad (120°\text{ の EsT}) \tag{3}$$

が成立つならば，

$$c^2 = a^2 + (a + b)^2 - a(a + b) \tag{4}$$

$$c^2 = b^2 + (a + b)^2 - b\,(a + b) \tag{5}$$

も成立するから，三角形 $(a, c, (a + b))$ も $(b, c, (a + b))$ も 60° の EsT になっていることが示される。これらは互いに共役であるという

しかし，それ以上のことはまだあまり詳しくは解析されていないのが現状である。

そこで，いくつかの系列の EsT について調べたところ，そこに出て来るいろいろな数列の Z グラフ（TopIx が Z になるグラフ）にある種の規則性が見つかった。従って，従来代数的にしか行われなかった EsT の解析にグラフ理論の介入が有用であるという見通しが得られた。

3． **$(m, 1)$ 系列の EsT**

先ず，表 1 のような n=1 の $(m, 1)$ 系列の EsT を考える。

表 1

m	n	a	b	c	$a + b$
2	1	3	5	7	8
3	1	8	7	13	15
(4)	1	15	9	21	24
5	1	24	11	31	35
6	1	35	13	43	48
(7)	1	48	15	57	63
8	1	63	17	73	80

そこには意図的に，(2) の条件 (ii) を外した EsT もカッコ付きで入れてある。これらの結果から

$$a = m^2 - 1\,, \quad b = 2m + 1, \quad c = m^2 + m + 1\,, \quad a + b = m^2 + 2m = (m + 1)^2 - 1 \tag{6}$$

という一般式は直ちに得られる。ここで a と $a + b$ は数列としては同じものである。b は単なる奇数だが，のこりの数列 a と c はいかなる性質のものであろうか。そこで，これらの Z グラフを探したところ，図 2 のような結果が得られた。

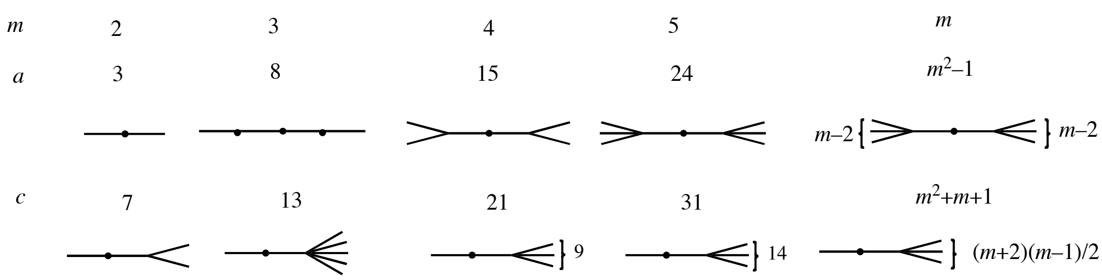

図 2.　$(m, 1)$ 系列の EsT に関わる数列の Z グラフ

今のところ，これらのグラフが何に由来するかは不明であるが，同じ (m，1)系列の EsT から似たような構造のグラフが関係していることは極めて興味深い。そこで，他の EsT の系列についても同様の解析を試みている。

4．$\sqrt{3}$ を近似する EsT の系列

一松氏は，｜a–b｜=1 という二等辺三角形に収束するような EsT の系列を調べると，表 2 のように，結果的に $\sqrt{3}$ の有理数近似が得られることを紹介している。

表 2

m	n	a	b	c	$a+b$	$2c/(a+b)$
3	1	8	7	13	15	1.73333
11	4	105	104	181	209	1.73205741
41	15	1456	1455	2521	2911	1.7320508416
153	56	20273	20272	35113	40545	1.732050807744
571	209	282360	282359	489061	564719	1.73205080756978

この背景には

$$(m-n)^2 - n^2 = 1 \tag{7}$$

というペル方程式が介在している。しかし，これ以上のことは報告されていない。そこで，表 2 のいろいろな数列の Z グラフを調べてみると，次のような結果が得られた。

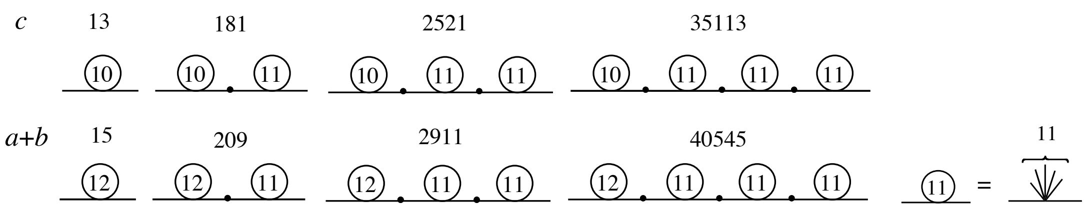

図 2. $\sqrt{3}$ の有理数近似を与える EsT の系列の Z グラフ

この他に，m と n の Z グラフも興味ある構造をもっていることがわかった．現在，この線に沿った解析を実行中である。

[1] 細矢治夫，日本コンピュータ化学会，2009 年春季年会.

[2] 細矢治夫，日本コンピュータ化学会，2009 年秋季年会.

[3] 細矢治夫，日本コンピュータ化学会，2010 年秋季年会.

[4] 一松信，整数とあそぼう，日本評論社 (2006).